Platz-Nr.: _______

Name: __________________________ Vorname: ________________________ Matrikel-Nr.:_____________

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
FK 3: SCHUMPETER SCHOOL OF BUSINESS AND ECONOMICS

Master of Science

Wintersemester 2023/2024

Prüfungsgebiet:	MWiWi 4.1 Advanced OR methods in Operations Management
Tag der Prüfung:	25.03.2024
Name des Prüfers:	Prof. Dr. Bock
Erlaubte Hilfsmittel:	Taschenrechner (nicht programmierbar)

Bearbeiten Sie **alle der vier gegebenen Aufgaben** vollständig!

Die Lösungen zu den Aufgaben sollen gegliedert und in vollständigen zusammenhängenden Sätzen dargestellt und Rechnungen mit ihren Zwischenschritten nachvollziehbar sein. **Ein Ergebnis ohne nachvollziehbare Rechnung erhält keine Punkte.**

Die Darstellungsform und die Systematik der Gedankenführung gehen in die Bewertung ebenfalls ein. In Klammern ist für jede Aufgabe die Anzahl der maximal möglichen Punkte angegeben, die bei einer richtigen und vollständigen Bearbeitung erreicht werden können. Sie entspricht in etwa dem erwarteten Zeitbedarf in Minuten.

Insgesamt können **90 Punkte** erreicht werden. Für eine erfolgreiche Bearbeitung müssen wenigstens **45 Punkte** erworben werden.

Die Klausur besteht inklusive Deckblatt und Formelsammlung aus **5** Seiten.

Unterschrift: ____

Aufgabe 1 (Line-TSP) **[22 Punkte]**

Sei eine Line-TSP Instanz mit 5 Kunden, Fahrzeuggeschwindigkeit $v = 1$ gegeben. Die Orte und Fälligkeiten sind der nachfolgenden Tabelle zu entnehmen:

Kunde i	1	2	3	4	5
Ort x_i von Kunde i	1	5	9	14	20
Fälligkeit d_i	50	16	0	12	50

a) Definieren Sie die Zustände $V^+(i,j)$ und $V^-(i,j)$. (4 Punkte)

b) Welcher Kunde muss der Startkunde i^* sein, damit eine zulässige Lösung existieren kann? (2 Punkte)

c) Ermitteln Sie mithilfe der dynamischen Programmierung den Zustand $V^+(2,5)$ und geben Sie die hieraus entstehende Teiltour an. (9 Punkte)

d) Sei nun eine Instanz mit $n = 2 \cdot m + 1$ vielen Kunden und Startkunde $i^* = m + 1$ gegeben. Die Fahrzeuggeschwindigkeit ist weiterhin $v = 1$ und die Abstände zwischen den Kundenorten betragen $|x_i - x_{i-1}| = 1$ für alle $i \in \{2, \dots, n\}$. Begründen Sie, warum der Wert $\sum_{i=1}^{n} i$ eine obere Schranke für dieses Problem ist, falls eine zulässige Lösung existiert. Skizzieren Sie die Struktur, die die Deadlines aufweisen müssen, damit dieser Wert der optimale Zielfunktionswert ist. (7 Punkte)

Aufgabe 2 (Traveling Salesman Problem) **[30 Punkte]**

Betrachtet wird die folgende Instanz des symmetrischen Traveling Salesman Problem mit 6 Knoten.

$$\begin{pmatrix} \infty & 8 & 14 & \infty & \infty & 12 \\ & \infty & 7 & \infty & \infty & 11 \\ & & \infty & 10 & 12 & 14 \\ & & & \infty & 14 & 15 \\ & & & & \infty & 13 \\ & & & & & \infty \end{pmatrix}$$

a) Finden Sie eine untere Schranke, indem Sie dieses Problem als LAP auffassen und für dieses eine optimale Lösung bestimmen. (9 Punkte)

b) Über welche Variable würde im Wurzelknoten verzweigt werden, wenn der Branch and Bound Ansatz von Little et al. angewendet werden würde, bei dem jedoch bei Berechnung der unteren Schranken eine optimale LAP Lösung herangezogen wird? (4 Punkte)

c) Zeichnen Sie das zugehörige Netzwerk. (4 Punkte)

d) Bestimmen Sie eine untere Schranke $L_g(x)$, indem Sie die Lagrange-Relaxierung mit dem Multiplier-Vektor

$$(g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6) = (1,2,2,0,0,0)$$

für den ausgezeichneten Knoten $s = 6$ lösen. (8 Punkte)

e) Berechnen Sie eine obere Schranke Z^{up}, indem Sie den Zielfunktionswert der Tour (1,2,3,4,5,6,1) bestimmen. (2 Punkte)

f) Ist es möglich, dass es eine bessere Lösung gibt, als die in Teilaufgabe e) vorgeschlagene Lösung? Begründen Sie Ihre Antwort. (3 Punkte)

Aufgabe 3 (Tabu Search) **[12 Punkte]**

Es sei das folgende QAP gegeben:

	a	**b**	**c**
a	-	2	1
b	1	-	4
c	3	3	-

(Distanzmatrix)

	1	**2**	**3**
1	-	1	2
2	1	-	4
3	2	3	-

(Flussmatrix)

Die Nachbarschaft einer Lösung ist die Menge aller Lösungen, die durch Vertauschung zweier Elemente entsteht. Wir befinden uns in einer Iteration des Tabu-Search-Verfahrens und die beste bisher gefundene Lösung hat einen Zielfunktionswert von 26. Die aktuelle Lösung lautet $x = 1 \mapsto a, 2 \mapsto b, 3 \mapsto c$. Die Tabuliste verbietet aktuell nur einen Tausch von c und a. Der Tabustatus wird aufgehoben, falls sichergestellt ist, dass keine zyklische Berechnung entstehen kann (Aspirationskriterium). Ermitteln Sie die neue aktuelle Lösung der nächsten Iteration.

(12 Punkte)

Aufgabe 4 (Cutting Stock) **[26 Punkte]**

Ein Möbelhersteller möchte Kinderstühle, Küchenstühle und Barhocker produzieren. Die Stuhlbeine der verschiedenen Stühle sind aus dem gleichen Material und werden aus längeren Rundholzstücken geschnitten, die jeweils eine Länge von 300 cm haben. Das Ziel ist es, möglichst wenige dieser Rundholzstücke zu verbrauchen. In der nachfolgenden Tabelle entnehmen Sie die Anzahl der zu produzierenden Stuhlbeine sowie die Länge der unterschiedlichen Typen:

Typ	Kinderstuhl	Küchenstuhl	Barhocker
Länge der Stuhlbeine (in cm)	30	45	80
Anzahl der zu produzierenden Stuhlbeine	60	140	28

a) Gegeben sei die aktuelle Basis, die aus den folgenden Schnittmustern besteht:

$$s_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, s_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, s_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Welches der Schnittmuster der Menge $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ hat die kleinsten reduzierten Kosten? (7 Punkte)

b) Geben Sie das Start-Tableau der LP-Relaxierung unter Hinzunahme des Schnittmusters $s_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ an. (Sie müssen **keine** optimale Lösung finden!) (7 Punkte)

c) Die folgende optimale Lösung würde sich nach dem Lösen des von Ihnen in Teil-aufgabe b) aufgestellten LPs ergeben:

primal $\left(x_{s_1}, x_{s_2}, x_{s_3}, x_{s_4}\right) = \left(\frac{9}{5}, \frac{70}{3}, 0, \frac{28}{3}\right)$ und dual $\pi = \left(\frac{1}{10}, \frac{3}{20}, \frac{4}{15}\right)$.

Der Zielfunktionswert dieser Lösung ist $\frac{517}{15}$.

i. Begründen Sie, warum diese Lösung optimal für die LP-Relaxierung des Cutting-Stock Problems ist. Für Ihre Argumentation könnten Sie die Effizienz der Finals im Pricing Problem heranziehen. (7 Punkte)

ii. Geben Sie eine optimale Lösung für das Cutting Stock Problem an. (5 Punkte)

Formeln:

$$J(j,l,k) = \{ i \mid j \le i \le l \wedge p_i < p_k \}$$

$$V(\varnothing,t) = 0 \text{ and } V(\{j\},t) = \max\{0, t + p_j - d_j\}$$

$$V(J(j,l,k),t) = \min_{\delta} \left(\begin{array}{l} V(J(j,k'+\delta,k'),t) + \max\left(0, t + p_{k'} + \sum_{j \in J(j,k'+\delta,k')} p_j - d_{k'}\right) \\ + V\left(J(k'+\delta+1,l,k'), t + \sum_{j \in J(j,k'+\delta,k)} p_j \right) \end{array} \right),$$

with $k' \in J(j,l,k)$ is such that $p_{k'} = \max\{ p_i \mid i \in J(j,l,k) \}$

$$LB = \left| J\left(\frac{1}{2},1\right] \right| + \left\lceil \frac{1}{2} \cdot \left| J\left[\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right] \right| \right\rceil$$

$$LB = \left\lceil \left| J\left(\frac{2}{3},1\right] \right| + \frac{2}{3} \cdot \left| J\left[\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right] \right| + \frac{1}{2} \cdot \left| J\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) \right| + \frac{1}{3} \cdot \left| J\left[\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right] \right| \right\rceil$$

$$\mathrm{C}(M) = \max\left\{ \sum_{i=0}^{k} t_{k \cdot M+1-i} : \mathrm{k} \in \left\{1,\ldots,\left\lfloor \frac{N-1}{M} \right\rfloor \right\} \right\}$$

$$LB = \min\{ M : C(M) \le C \}$$

$$E_j := \left\lceil \frac{\left(t_j + \sum_{h \in P_j^*} t_h \right)}{C} \right\rceil \qquad \text{for } j = 1,\ldots,N$$

$$L_j(M) := M + 1 - \left\lceil \frac{\left(t_j + \sum_{h \in F_j^*} t_h \right)}{C} \right\rceil \qquad \text{for } j = 1,\ldots,N$$

$$LB = \min\{ M \mid L_j(M) \ge E_j \forall j \}$$

$$L(j) = \sum_{k \in \{h \mid h < j, h \notin P_j^*\}} L(k) + 1$$

$$\text{If } x < e^{\frac{-\Delta}{t}}, \text{then } S_0 = S$$

$$\forall i < i^* < j : U^+(i,j) = \min\{ V^+(i,j-1) + x_j - x_{j-1}, V^-(i,j-1) + x_j - x_i \}$$

$$\forall i < i^* < j : U^-(i,j) = \min\{ V^-(i+1,j) + x_{i+1} - x_i, V^+(i+1,j) + x_j - x_i \}$$